

# Mitte-Rand-Verdunkelung, Temperaturverteilung und kontinuierliche Absorption der Sonnenatmosphäre

Von ALBRECHT UNSÖLD\*

(Z. Naturforschg. 3 a, 486—492 [1948]; eingegangen am 10. Juli 1948)

Die bisherigen Versuche, aus den Beobachtungen der Mitte-Rand-Verdunkelung und der (absolut gemessenen) spektralen Energieverteilung im kontinuierlichen Sonnenspektrum auf die Temperaturverteilung und die Wellenlängen- und Tiefenabhängigkeit des kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten in der Sonnenatmosphäre zu schließen, werden zusammenfassend dargestellt. Alle diese Untersuchungen deuten zunächst auf eine relativ hohe Grenztemperatur  $T_0 \approx 4900$  bis  $5000^\circ\text{K}$  hin.

Hiermit stehen direkte Temperaturbestimmungen der äußersten Schichten in Widerspruch; diese führen auf eine niedrigere Grenztemperatur.

Es wird gezeigt, daß man das gesamte Beobachtungsmaterial verstehen kann, wenn man beachtet, daß nach früheren Rechnungen des Verf. in der Schicht, welche in der Hauptsache die Fraunhofer-Linien erzeugt ( $\tau$  etwa 0 bis 0,3), die Temperatur im Strahlungsgleichgewicht außen niedriger und innen höher ist als in einer „grauen“ Atmosphäre. Findet diese Änderung der Temperaturverteilung infolge Behinderung des Strahlungsenergietransportes durch die Linien ganz oberhalb einer optischen Tiefe  $\tau_0$  ( $\approx 0,3$ ) statt, so macht sie sich in der Strahlung der Sonnenscheibe  $I(\vartheta)$  erst bei  $\cos \vartheta < \tau_0$  bemerkbar. Die durch „glatte“ Extrapolation erhaltene Grenztemperatur  $T_0 \approx 4900$  bis  $5000^\circ\text{K}$  dürfte also erheblich über der wahren liegen.

Auf Zusammenhänge mit der Theorie der Restintensitäten in der Mitte der Fraunhofer-Linien sowie der Spektroheliogramme wird kurz hingewiesen.

Die Ausstrahlung der Sonnenatmosphäre können wir nach E. A. Milne unter der Annahme „lokalen thermodynamischen Gleichgewichtes“ (wahre Absorption im Sinne K. Schwarzschilds) in ihrer Abhängigkeit von Wellenlänge  $\lambda$  und Austrittswinkel  $\vartheta$  berechnen, wenn uns der Absorptionskoeffizient  $\kappa$  als Funktion der Wellenlänge  $\lambda$  und der Tiefe  $t$  in der Atmosphäre sowie die Temperatur  $T$  als Funktion von  $t$  gegeben sind. Genauer gesagt, wir brauchen uns gar nicht mit  $t$  selbst zu befassen, sondern nur mit den optischen Tiefen für die spektral zerlegte Strahlung mit dem Absorptionskoeffizienten  $\kappa(\lambda, t)$  bzw. für die Gesamtstrahlung mit dem Absorptionskoeffizienten  $\bar{\kappa}(t)$ . (Auf die Berechnung von  $\bar{\kappa}$  aus den  $\kappa$  werden wir noch zurückkommen.) Es sei also<sup>1</sup>

$$\tau = \int_t^{\infty} \kappa dt \quad \text{und} \quad \bar{\tau} = \int_t^{\infty} \bar{\kappa} dt, \quad (1)$$

wobei selbstverständlich

$$\frac{d\tau}{d\bar{\tau}} = \frac{\kappa}{\bar{\kappa}} \quad (2)$$

\* Kiel, Olshausenstraße, Neue Universität.

<sup>1</sup> Der Einfachheit wegen lassen wir bei allen  $\lambda$ -abhängigen Größen den sonst vielfach üblichen Index  $\lambda$  oder  $\nu$  weg.

gilt. Kennen wir nun die Temperatur  $T$  in Abhängigkeit von einem dieser Argumente, so gibt uns die Kirchhoff-Planck-Funktion  $B(T)$  mal dem Absorptionskoeffizienten  $\kappa$  die Strahlungsergiebigkeit. Daraus berechnet man in bekannter Weise die an der Sonnenoberfläche  $\tau = 0$  unter dem Winkel  $\vartheta$  zur Normalen austretende Strahlungsintensität

$$I(\vartheta) = \int_0^{\infty} B(\tau) e^{-\tau \sec \vartheta} d\tau \sec \vartheta. \quad (3)$$

Durch Integration über die Einheitskugel mit einem Gewichtungsfaktor  $\cos \vartheta$  erhält man hieraus für den Strahlungsstrom  $\pi F$  an der Oberfläche

$$F = 2 \int_0^{\infty} B(\tau) K_2(\tau) d\tau, \quad (4)$$

wo  $K_2(\tau)$  die 2. Integraleponentialfunktion bedeutet.

Wie zuerst wohl R. Lundblad<sup>2</sup> bemerkt hat, kann man die Gl. (3) umgekehrt benützen, um aus den Beobachtungen Rückschlüsse auf Temperaturverteilung und kontinuierliche Absorption in der Sonnenatmosphäre zu ziehen.

<sup>2</sup> R. Lundblad, Astrophysic. J. 58, 113 [1923].



Die Mitte-Rand-Verdunkelung  $I(\vartheta)/I(0)$  ist von C. G. Abbot, W. J. H. Moll, H. C. Burger und J. v. d. Bilt (vgl. z.B. Anm. 3), H. Raudenbusch<sup>4</sup> und neuestens von R. Canavaggia und D. Chalonge<sup>5</sup> eingehend untersucht worden. Die Messungen der *spektralen Energieverteilung* im Spektrum der  $\odot$ -Mitte  $I(0)$  bzw. des Strahlungsstromes  $\pi F$  hat bis zum Jahre 1935 G. F. W. Mulders<sup>6</sup> kritisch zusammengefaßt. Weitere Beobachtungen sind dann von E. Pettit ausgeführt worden. Im UV brachten 1940 die Messungen von D. Chalonge (z.B. Anm. 5; dort weitere Literatur) und seinen Mitarbeitern (hierzu auch J. Dufay<sup>7</sup> und H. Kienle<sup>8</sup>) die entscheidende Erkenntnis, daß dort das „wahre“ Kontinuum nur in einigen schmalen „Fenstern“ zutage tritt.

Die Messungen der Mitte-Rand-Verdunkelung  $I(\vartheta)/I(0)$  zusammen mit der spektralen Energieverteilung  $I(0)$  oder  $F$  legen die Strahlungsintensität  $I(\vartheta)$  an der Sonnenoberfläche als Funktion des Austrittswinkels  $\vartheta$  und der Wellenlänge  $\lambda$  in absolutem Maß fest.

Durch Umkehrung der Integralgleichung (3) kann man hieraus zunächst für jede Wellenlänge die Kirchhoff-Planck-Funktion  $B$  als Funktion der optischen Tiefe  $\tau$  für ebendieselbe Wellenlänge erhalten.

Da weiterhin  $B$  nur von  $\lambda$  und  $T$  abhängt, ist damit auch für jedes  $\lambda$  die Verknüpfung zwischen  $\tau$  und  $T$  festgelegt. So können schließlich sämtliche  $\tau$  sowie  $T$  als Funktionen der optischen Tiefe  $\tau_0$  für eine bestimmte Wellenlänge  $\lambda_0$  oder des  $\bar{\tau}$  — das sich auf einen noch zu definierenden Mittelwert  $\bar{x}$  bezieht — dargestellt werden. Aus der Verknüpfung der  $\tau$  mit  $\tau_0$  oder  $\bar{\tau}$  erhält man nach (2) sofort  $x/x_0$  bzw.  $x/\bar{x}$  für jede Wellenlänge als Funktion der Temperatur  $T$  oder der optischen Tiefe  $\tau_0$  bzw.  $\bar{\tau}$  in der Sonnenatmosphäre.

Im Laufe der letzten 15 Jahre ist das im vorhergehenden umrissene Problem in zahlreichen Arbeiten behandelt worden, wobei freilich der Einfluß der Meßfehler, der Lücken des Beobachtungsmaterials (Beschränkung auf  $1 > \cos \vartheta > 0,3$ ; Fraunhofer-Linien usw.) und der mathematischen Vereinfachungen bei der numerischen Lösung des Problems nicht immer genügend beachtet und ge-

trennt wurden. So dürfte es nicht überflüssig sein, das Erreichte kritisch darzustellen und zu sichten, um damit den Weg für weitere Untersuchungen freizumachen, die hoffentlich die Lösung einiger z. Zt. noch offener Fragen bringen werden.

### 1. Die Auflösung der Gleichung

$$I(\vartheta) = \int_0^\infty B(\tau) e^{-\tau \sec \vartheta} d\tau \sec \vartheta$$

Um unsere obige Grundgleichung (3) zu lösen, empfiehlt es sich,  $I(\vartheta)$  bzw.  $B(\tau)$  durch ein Aggregat geeigneter analytischer Ausdrücke darzustellen.

a) R. Lundblad<sup>2</sup> zerlegt  $B(\tau)$  in Glieder der Form

$$B_k(\tau) = a_k \tau^k, \quad (5a)$$

denen jeweils in  $I(\vartheta)$  ein Anteil

$$I_k(\vartheta) = a_k k! \cos^k \vartheta \quad (5b)$$

entspricht. Umgekehrt muß man also  $I(\vartheta)$  nach Potenzen von  $\cos \vartheta$  entwickeln und hat damit  $B(\tau)$  als Potenzreihe nach  $\tau$ .

b) Im Anschluß an Arbeiten von S. Chandrasekhar und A. Unsöld könnte man in  $B(\tau)$  auch Glieder der Form

$$B_k(\tau) = A e^{-a\tau} \quad (6a)$$

isolieren, denen dann ein

$$I_k(\vartheta) = \frac{A}{1 + a \cos \vartheta} \quad (6b)$$

entspricht.

c) Einem Anteil von  $B(\tau)$ , der für

$$\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2 \text{ gleich } C \text{ und sonst gleich } 0 \quad (7a)$$

ist, entspricht in  $I(\vartheta)$  nach (3) ein Anteil

$$C(e^{-\tau_1 \sec \vartheta} - e^{-\tau_2 \sec \vartheta}). \quad (7b)$$

Die Verfahren a) bis c) dürften wohl stets ausreichen, um Gl. (3) in einfacher und genauer Weise umzukehren.

d) I. W. Busbridge<sup>9</sup> hat noch bemerkt, daß

<sup>5</sup> R. Canavaggia u. D. Chalonge, Ann. d'Astrophysique **9**, 143 [1946].

<sup>6</sup> G. F. W. Mulders, Z. Astrophysik **11**, 132 [1935].

<sup>7</sup> J. Dufay, Ann. d'Astrophysique **5**, 1 [1942].

<sup>8</sup> H. Kienle, Astronom. Nachr. **275**, 32 [1947].

<sup>9</sup> I. W. Busbridge, Monthly Notices Roy. astronom. Soc. **101**, 26 [1941].

<sup>3</sup> A. Unsöld, Physik der Sternatmosphären, Berlin 1938.

<sup>4</sup> H. Raudenbusch, Astronom. Nachr. **266**, 301 [1938].

man mit einem Ansatz

$$I(\vartheta) \sim \{ (m-1) \sec \vartheta + 1 \}^{-\alpha} \quad (8)$$

die Gl. (3) durch unvollständige Gamma-Funktionen lösen kann.

2. Untersuchungen, welche von bestimmten Ansätzen für das Verhältnis  $x/\bar{x}$  und die Temperaturverteilung in der Sonnenatmosphäre ausgehen

Die älteren Untersuchungen auf unserem Gebiet — mit Ausnahme der seinerzeit wenig beachteten Arbeit von R. Lundblad<sup>2</sup> — machen durchweg die vereinfachende Annahme, daß  $x/\bar{x}$  für jede Wellenlänge einen festen, von der Tiefe unabhängigen Wert besitzt. Weiterhin setzen sie voraus, daß die Sonnenatmosphäre sich im Strahlungsgleichgewicht befindet.

Bei der Berechnung ihrer Temperaturverteilung  $T(\tau)$  wird vielfach die Wellenlängenabhängigkeit von  $x$  vernachlässigt („graue Atmosphäre“). Bezeichnet man die effektive Temperatur mit  $T_e$ , so gilt dann

$$T^4 = \frac{3}{4} T_e^4 (\bar{\tau} + q(\bar{\tau})). \quad (9)$$

Nach E. A. Milne ist in 1. Näherung  $q(\bar{\tau}) = 2/3$ ; genauere Approximationen für  $q(\bar{\tau})$  sind von verschiedenen Autoren, insbesondere von S. Chandrasekhar berechnet worden. Die optische Tiefe  $\bar{\tau}$  bezieht sich auf die Gesamtstrahlung; der entsprechende Absorptionskoeffizient  $\bar{x}$  entsteht durch Mittelung über alle  $x$ . Eine bestimmte Mittelungsvorschrift hat zuerst S. Rosseland angegeben. Neuerdings hat S. Chandrasekhar diese in Zweifel gezogen und durch eine andere ersetzt wissen wollen. Eine eingehende Untersuchung der Streitfrage durch den Verf. zeigte jedoch, daß der Ansatz von S. Rosseland im wesentlichen zu Recht besteht und höchstens in den alleräußersten Schichten geringer Modifikationen im Sinne Chandrasekhars bedarf (vgl. Anm. 10; dort weitere Literatur).

Soweit ist der Einfluß der ungeheueren Vergrößerung des Absorptionskoeffizienten in den Fraunhoferschen Linien noch gar nicht berücksichtigt.

<sup>10</sup> A. Unsöld, Z. Astrophysik 1948 (im Erscheinen).

Einige Arbeiten versuchen, ihm Rechnung zu tragen, indem sie im Anschluß an eine klassische Arbeit von E. A. Milne die Entstehung der Linien in eine dünne Deckschicht („blanketing effect“) verlegen, die aus dem kontinuierlichen Spektrum einen Bruchteil  $\eta$  herausabsorbiert. Damit ergibt sich an Stelle von Gl. (9) in der Milneschen Näherung ( $q = 2/3$ ):

$$T^4 = \frac{3}{4} T_e^4 \left( \bar{\tau} + \frac{2}{3} \frac{1+\eta}{1-\eta} \right). \quad (10)$$

Der Koeffizient von  $\bar{\tau}$  bleibt unverändert, während die Grenztemperatur für  $\bar{\tau} = 0$  infolge der Rückstrahlung der „umkehrenden Schicht“ von

$$T_0 = T_e \left( \frac{1}{2} \right)^{1/4} \quad \text{auf} \quad T'_0 = T_e \left( \frac{1}{2} \frac{1+\eta}{1-\eta} \right)^{1/4} \quad (11a \text{ u. b})$$

ansteigt. Für  $T_e = 5713^\circ \text{K}$  wird  $T_0 = 4830^\circ \text{K}$  und  $T'_0 = 5000^\circ \text{K}$ , wenn wir nach G. F. W. Mulders<sup>6</sup>  $\eta = 0,083$  setzen.

Unter den genannten Voraussetzungen kann man nun  $x/\bar{x}$  sowohl aus der Mitte-Rand-Verdunkelung  $I(\vartheta)/I(0)$  wie auch aus den Absolutwerten der spektralen Energieverteilung  $I(0)$  bzw.  $F$  ermitteln.

Die Zusammenhänge werden am durchsichtigsten, wenn wir — zahlenmäßig nur eine grobe Näherung —  $B(\tau)$  durch einen linearen Ansatz

$$B(\tau) = a + b \bar{\tau} = a + b \frac{\bar{x}}{\bar{x}} \tau \quad (12)$$

approximieren. Dann gilt an der Sonnenoberfläche

$$I(\vartheta) = a + b \frac{\bar{x}}{\bar{x}} \cos \vartheta \quad (13)$$

sowie

$$I(0) = a + b \frac{\bar{x}}{\bar{x}} \quad \text{und} \quad F = a + \frac{2}{3} b \frac{\bar{x}}{\bar{x}} \quad (14a \text{ u. b})$$

und damit

$$\frac{I(\vartheta)}{I(0)} = \frac{1 + \frac{b}{a} \frac{\bar{x}}{\bar{x}} \cos \vartheta}{1 + \frac{b}{a} \frac{\bar{x}}{\bar{x}}}. \quad (15)$$

Nach diesen etwas umständlichen Vorbereitungen stellen wir die Ergebnisse einer Reihe von Untersuchungen verschiedener Autoren tabellarisch zusammen, welche sich im Rahmen der in diesem Abschnitt erörterten Voraussetzungen be-

A) Temperaturverteilung ohne „blanketing effect“					
$\lambda$	4260	5060	5960	6700	Literatur-Bemerkungen
$I(\vartheta)/I(0)$	0,96	1,14	1,11	1,29	A. Unsöld und A. W. Maue <sup>11</sup> , $q(\tau)$ zweite Näherung
$I(0)$	0,67	0,76	0,81	0,85	A. Unsöld <sup>3</sup> lin. Näherg. G. Münch <sup>12</sup> , $q(\tau) = 2/3$ ; sonst exakt
	0,65	0,72	0,77	0,83	
$F$	0,65	0,67	0,75	0,80	G. Münch <sup>12</sup> , $q(\tau)$ zweite Näherung
B) Temperaturverteilung mit „blanketing effect“; $\eta = 0,083$					
$I(\vartheta)/I(0)$	0,94	0,81	0,98	1,06	H. Raudenbusch <sup>13</sup> , Mittel der beiden Auswertungen bei R.
$I(0)$	0,80	0,84	0,91	0,97	G. F. W. Mulders <sup>6</sup> , $q(\tau) = 2/3$
	0,72	0,83	0,90	0,97	
					H. Raudenbusch <sup>13</sup> , $q(\tau) = 2/3$

Tab. 1. Mittelwert von  $x/\bar{x}$  für die Sonnenatmosphäre.

wegen. Wir beschränken uns dabei auf vier — von Fraunhofer-Linien möglichst wenig gestörte — Wellenlängen im sichtbaren Spektralgebiet, für welche mehrere genaue Meßreihen vorliegen.

Die aus der Randverdunkelung bzw. der spektralen Energieverteilung abgeleiteten Verhältnisse  $x/\bar{x}$  stimmen *ohne* Berücksichtigung des blanketing-Effekts nur schlecht miteinander überein. *Mit* Berücksichtigung der Rückstrahlung der „umkehrenden Schicht“ wird — wie schon H. Raudenbusch<sup>13</sup> bemerkt hat — die Übereinstimmung wesentlich besser.

Inwiefern wird hierdurch die Milnesche Theorie des blanketing-Effekts — die doch auf jeden Fall eine erhebliche Schematisierung der Wirklichkeit darstellen muß — bestätigt? Wir beantworten diese Frage am einfachsten an Hand unserer Formeln (12) bis (15), wobei zu bedenken ist, daß die Koeffizienten  $a$  und  $b$  für die spektral zerlegte Strahlung sich durch Berücksichtigung der Rückstrahlung qualitativ in ähnlicher Weise ändern werden wie die der Gesamtstrahlungsformel (10).

Bei der Berechnung der Randverdunkelung geht nach Gl. (15) nur das Verhältnis  $b/a \cdot \bar{x}/x$  ein,

<sup>11</sup> A. Unsöld u. A. W. Maue, Z. Astrophysik 5, 1 [1932].

<sup>12</sup> G. Münch, Astrophysic. J. 102, 385 [1945].

d. h. der Ergiebigkeits-Gradient. In der absoluten Strahlungsintensität  $I(0)$  bzw. dem Strahlungsstrom  $\pi F$  dagegen sind  $a$  und  $b \bar{x}/x$  in anderer Kombination enthalten. Wir müssen also schließen, daß es auf  $a$ , d. h. — physikalisch gesprochen — auf die Grenztemperatur  $T_0$  wirklich ankommt. Dagegen würden bei einer Veränderung von  $b$  — d. h. des Ergiebigkeitsgradienten — sich die aus Randverdunkelung und spektraler Intensitätsverteilung bestimmten  $x/\bar{x}$  in derselben Weise ändern. Über  $b$  selbst könnten wir erst dann etwas aussagen, wenn wir aus einer Analyse des gesamten Spektrums prüfen könnten, ob der Rossellandsche Mittelwert über alle  $x/\bar{x}$  wirklich  $= 1$  ist. In diesem Zusammenhang wäre wohl zu erwägen, ob das Beobachtungsmaterial eine solche Integration mit der nötigen Genauigkeit erlaubt, und ob die Annahme, daß  $x/\bar{x}$  von der Tiefe nicht abhängt, noch zulässig ist.

### 3. Die Untersuchungen von D. Chalonge und V. Kourganoff sowie von D. Barbier

Gegenüber den im vorhergehenden Abschnitt zusammengefaßten Arbeiten bedeuten die schönen Untersuchungen von D. Chalonge und V. Kourganoff<sup>14</sup> sowie von D. Barbier<sup>15</sup> einen großen Fortschritt. Nach dem Verfahren von R. Lundblad (Gln. 5a und 6) — Chalonge benützt daneben zum Vergleich auch das von I. W. Busbridge (Gl. 8) — wird zunächst aus der Randverdunkelung für jede Wellenlänge die Ergiebigkeit  $B$  als Funktion der optischen Tiefe  $\tau$  für ebendieselbe Wellenlänge in relativen Einheiten berechnet. Diese werden dann aneinander angeschlossen bei Chalonge und Kourganoff mit Hilfe der Messungen der spektralen Energieverteilung  $I(0)$ , bei Barbier mit Hilfe der Forderung, daß das Spektrum des äußersten Sonnenrandes ( $\vartheta = 90^\circ$ ) relativ und absolut der Strahlung eines schwarzen Körpers der Grenztemperatur  $T_0$  entsprechen muß. (Ob man die Genauigkeit der Messungen für  $\odot$ -Mitte oder die Extrapolation der Randverdunkelungsmessungen von  $\cos \vartheta \approx 0,3$  auf 0 günstiger beurteilt, bleibt wohl Geschmacksache.) Aus den über  $B(\tau)$  hergestellten Relationen der  $\tau$  untereinander ergibt sich dann  $x/x_0$ .

<sup>13</sup> H. Raudenbusch, Astronom. Nachr. 270, 39 [1939].

<sup>14</sup> D. Chalonge u. V. Kourganoff, Ann. d'Astrophysique 9, 69 [1946].

<sup>15</sup> D. Barbier, Ann. d'Astrophysique 9, 173 [1946].



—  $\kappa_0$  bedeutet wieder den Absorptionskoeffizienten für eine fest gewählte Wellenlänge — als Funktion der Wellenlänge und der optischen Tiefe, z. B.  $\tau_0$ . Das zur Umrechnung auf  $\kappa/\bar{\kappa}$  noch nötige Verhältnis  $\kappa_0/\bar{\kappa}$  (als Funktion der Tiefe) kann wieder nur durch einen Rückgriff, z. B. auf die Theorie des Strahlungsgleichgewichtes, erhalten werden.

Nun die wichtigsten Ergebnisse: Für die Grenztemperatur der Sonne finden Chalonge und Kourganoff  $T_0 = 4900^\circ$ , Barbier  $4910^\circ \text{K}$ , also Werte, die jedenfalls erheblich höher sind als der für die „graue“ Atmosphäre berechnete<sup>16</sup>. Für letztere liefert bekanntlich die übliche Milnesche Näherung ( $q(\tau) = 2/3$ )  $T_0 = 4830^\circ \text{K}$ , während die exakte Formel von E. Hopf und M. Bronstein  $T_0 = 4630^\circ \text{K}$  ergibt (vgl. z. B. Anm. 3). Hinsichtlich  $T_0$  sprechen also auch diese Untersuchungen zunächst für das blanketing-Modell. Bezüglich der Gesamtheit der  $\kappa/\bar{\kappa}$  findet D. Barbier, daß ihre Werte etwas zu klein sind, als daß der Rosselandsche Mittelwert darüber gleich Eins werden könnte. In dieselbe Richtung weisen auch entsprechende Bemerkungen von G. Münch<sup>12</sup> sowie von S. Chandrasekhar und G. Münch<sup>17</sup>. Ob hierfür allein die Vergrößerung des  $\bar{\kappa}$  auch in tieferen Schichten durch das Hinzukommen der Linienabsorption verantwortlich ist, oder ob schon die direkte Beeinflussung der Temperaturschichtung durch die Linien (s. u.) eine Rolle spielt, ist noch nicht sicher. Bezüglich der letzteren Arbeiten erscheint in quantitativer Hinsicht die vom Verf.<sup>10</sup> entwickelte Kritik des Chandrasekhar'schen Mittelungsverfahrens nicht unwesentlich.

Es soll hier nicht nochmals auseinandergesetzt werden, in wie schöner und klarer Weise die Untersuchungen von Chalonge-Kourganoff und Barbier das Zustandekommen des kontinuierlichen Sonnenspektrums durch das negative Wasserstoffion bestätigen. Wir wollen uns vielmehr im folgenden in erster Linie dem schon angeschnittenen Problem der Temperaturschichtung der Sonnenatmosphäre zuwenden.

<sup>16</sup> Schon M. Minnaert u. W. J. Claas, Bull. Astronom. Inst. Netherlands **9**, 261 [1942], hatten durch direkte Extrapolation der Randverdunklungsmessungen für die Grenztemperatur der Sonne als wahrscheinlichsten Wert  $T_0 = 4920^\circ \text{K}$  erhalten.

<sup>17</sup> S. Chandrasekhar u. G. Münch, Astrophysic. J. **104**, 446 [1946].

<sup>18</sup> K. Wurm, Ann. Physik 1948 (Planck-Festschrift).

#### 4. Die Temperaturverteilung in den äußeren Schichten der Sonnenatmosphäre

Trotzdem die in den Abschnitten 2 und 3 zusammengefaßten und miteinander in Beziehung gesetzten Arbeiten zu nahezu übereinstimmenden Ergebnissen führen, ergeben sich doch — von anderen Gesichtspunkten aus gesehen — erhebliche Schwierigkeiten:

1. Die spektroskopischen Bestimmungen der *Anregungstemperatur* für die tieferen Terme neutraler *Atome* in der Sonne durch zahlreiche Autoren führen ebenso wie die meisten Auswertungen von *Bandenspektren* auf Temperaturen von 4600 bis 5000°. Dies ist mit den hohen Grenztemperaturen nach Abschn. 2 und 3 kaum zu vereinbaren.
2. Die *Protuberanzen* (Filamente) erscheinen auf der ganzen Sonnenscheibe mit  $H_\alpha$  und K in Absorption, trotzdem die Restintensität schon der normalen Linien ziemlich klein ist. Hieraus müssen wir nach K. Wurm<sup>18</sup> auf eine sehr niedrige Anregungstemperatur schließen.
3. Das Milnesche Modell des blanketing-Effekts stellt nur eine rohe *Schematisierung* der Sonnenatmosphäre dar. Sobald man berücksichtigt, daß die Linienabsorption — wie dies die Beobachtungen über die Mitte-Rand-Variation der Fraunhofer-Linien eindeutig fordern (vgl. z. B. A. Unsöld<sup>19</sup>) — nicht nur an der Oberfläche stattfindet, sondern sich in einige Tiefe erstreckt, sinkt aber nach den Rechnungen von S. Chandrasekhar<sup>20</sup>, A. Unsöld<sup>21</sup> und G. Münch<sup>22</sup> die Grenztemperatur  $T_0$  rapide ab. Letzterer gibt z. B. 4600° als wahrscheinlichsten Wert an und spricht von „the misleading results given by the Milne blanketing model“!

Wie lassen sich die bemerkten Unstimmigkeiten nun beheben? Offenbar müssen wir nochmals auf die Frage zurückkommen, wie die Absorptionslinien die Temperaturverteilung der Sonnenatmosphäre beeinflussen. Das Milnesche Modell führt zu Schwierigkeiten mit dem spektroskopischen Beobachtungsmaterial. Benützen wir andererseits

<sup>19</sup> A. Unsöld, Z. Astrophysik 1948 (Planck-Festschrift).

<sup>20</sup> S. Chandrasekhar, Monthly Notices Roy. astronom. Soc. **96**, 21 [1935].

<sup>21</sup> A. Unsöld, Z. Astrophysik **22**, 356 [1944].

<sup>22</sup> G. Münch, Astrophysic. J. **104**, 87 [1946].

ein (M.E.-) Modell, in dem das Verhältnis des kontinuierlichen zum Linienabsorptionskoeffizienten für jede Frequenz von der Tiefe unabhängig ist, so erhält man eine Abnahme der Temperatur in *allen* äußeren Schichten, die mit den Ergebnissen von Abschn. 2 und 3 nicht verträglich ist.

So empfiehlt sich als ein Kompromiß, der nach allem, was wir wissen, der Wirklichkeit viel besser angepaßt ist, ein *Schichtmodell*, in dem die Linien in einer endlichen Schicht  $\tau=0$  bis  $\tau_0$  (diese optischen Tiefen beziehen sich auf das Kontinuum) gebildet werden. Wie Verf.<sup>21</sup> im Anschluß an eine grundlegende Arbeit von S. Chandrasekhar<sup>20</sup> gezeigt hat, führt eine solche — in gewissen Frequenzbereichen selektiv absorbierende — Schicht zu einer Verkleinerung der Grenztemperatur  $T_0$  an der Sonnenoberfläche, der aber in den inneren Teilen dieser Schicht eine etwa entsprechende Erwärmung gegenübersteht (vgl. Anm. 21, Abb. 2, Kurve 2 A).

Man kann nun leicht zeigen, daß eine solche „Zacke“ in der Ergiebigkeitskurve bei  $0 < \tau < \tau_0$  (wie wir sie in Abb. 1 nochmals schematisch wiedergeben) die Mitte-Rand-Verdunkelung und die Energieverteilung für  $\cos \vartheta > \tau_0$  nicht wesentlich beeinflusst, sofern die in Abb. 1 schraffierten Flächen etwa gleich sind. Statt allgemeiner Erörterungen sei ein einfaches numerisches Beispiel vorgeführt: Ändern wir die Ergiebigkeit von  $\tau=0$  bis 0,05 um den Betrag  $\Delta B = -0,95$  und von  $\tau=0,05$  bis 0,1 um  $\Delta B = +1$  (in irgendwelchen Einheiten)<sup>23</sup>, so erhalten wir nach (7a) und (7b) folgende Änderungen der Strahlungsintensität (in denselben Einheiten):

☉-Mitte				☉-Rand		
$\cos \vartheta =$	1	0,5	0,2	0,1	0,05	0,00
$-\Delta I(\vartheta) =$	0,000	0,004	0,038	0,135	0,366	0,950

Tab. 2.

Wie man sieht, beträgt bei  $\cos \vartheta > \tau_0 = 0,1$  die Störung der Strahlungsintensität nur wenige Prozent von der der Ergiebigkeit in der „umkehrenden Schicht“.

Da die Randverdunkelungsmessungen bei  $\cos \vartheta = 0,3$  bis 0,25 praktisch endigen, so würde bei ihrer Auswertung nach R. Lundblad<sup>2</sup> bzw. D.

<sup>23</sup> Für die numerische Rechnung ist es gleichbedeutend und einfacher, für  $0 < \tau < 0,1$   $\Delta B = +1$  und außerdem für  $0 < \tau < 0,05$   $\Delta B = -1,95$  zu setzen.

Chalonge und V. Kourganoff<sup>14</sup> eine Störung im Temperaturverlauf von dem gerade zu erwartenden Typus oberhalb  $\tau = 0,25$  gar nicht bemerkt werden können! Andererseits zeigt eine Abschätzung des Ionisations- und Anregungsverlaufes für die das Sonnenspektrum dominierenden Linien der neutralen Metalle, in Übereinstimmung mit den Beobachtungen ihrer Mitte-Rand-Variation, daß diese hauptsächlich gerade in der Schicht  $0 < \tau < 0,3$  entstehen.

Es ist damit also so gut wie sicher, daß die scheinbar einander widersprechenden Schlüsse aus dem kontinuierlichen und dem Linienspektrum

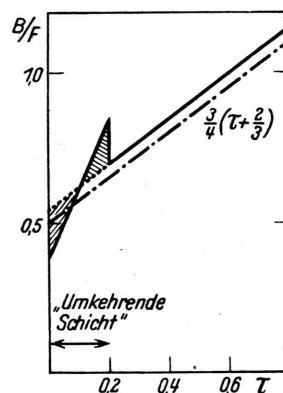


Abb. 1. Änderung der Temperaturverteilung in der Sonnenatmosphäre durch die Fraunhofer-Linien. (Schematisch.)

der Sonne sich harmonisch zusammenfügen, wenn man die Beeinflussung der Temperaturverteilung durch die Linien in der erörterten Weise (qualitativ wie in Abb. 1) berücksichtigt.

D. Chalonge und V. Kourganoff haben aus einem Vergleich der Umkehrung von Gl. (3) nach den Verfahren von Lundblad bzw. Busbridge den Schluß gezogen, daß es auf die Extrapolation der Randverdunkelungskurven für  $\cos \vartheta < 0,3$  überhaupt nicht ankäme. Dies ist zwar richtig, solange man sich auf die Ergiebigkeit für  $\tau > 0,3$  beschränkt, wie es die genannten Autoren in ihrer Fig. 3 auch tatsächlich tun. Bei  $\tau < 0,3$  sind aber trotzdem — analog unserer Tab. 2 — noch sehr große Änderungen möglich<sup>24</sup>.

Nach einer neueren Untersuchung von R. Wildt<sup>25</sup> über das Spektrum der *Chromosphäre*,

<sup>24</sup> Schon für eine „graue“ Atmosphäre mit  $T_e = 5713^\circ$  sinkt übrigens von  $\tau = 0,1$  bis 0 [nach der exakten Formel für  $q(\tau)$ ] die Temperatur noch von 4880 auf  $4630^\circ$  K.

<sup>25</sup> R. Wildt, *Astrophysic. J.* **105**, 36 [1947].

an Hand des reichhaltigen Beobachtungsmaterials von S. A. Mitchell, hält die rasche Temperaturabnahme in der Chromosphäre bis zu Höhen von vielen hundert Kilometern noch an; erst in noch größeren Höhen bereitet sich dann der Temperaturanstieg vor, der in der *Korona* zu Temperaturen von  $\sim 500\,000^\circ$  führt. Nach L. Biermann und P. ten Bruggencate<sup>26</sup> kann man diese Erwärmung der alleräußersten Sonnenschichten vielleicht auf das Einstürzen kosmischer Materie zurückführen.

Die erheblichen Temperaturunterschiede, welche nach dem Gesagten noch in den äußersten Schichten der Sonnenatmosphäre zu erwarten sind, werden auch für die Theorie der *Restintensitäten* in der Mitte der Fraunhofer-Linien wie für die Deutung der *Spektroheliogramme* von Bedeutung sein. Eine detaillierte Behandlung dieser Probleme dürfte sich jedoch erst in Verbindung mit eingehenden Modellrechnungen lohnen.

<sup>26</sup> L. Biermann u. P. ten Bruggencate, Veröff. Göttinger Sternwarte Nr. 83 [1947].

## Zur maßsystem-anpassungsfähigen Schreibweise der Elektrodynamik

Von RUDOLF FLEISCHMANN

Aus dem Physikalischen Staatsinstitut Hamburg

(Z. Naturforsch. 3 a, 492—495 [1948]; eingegangen am 9. Juli 1948)

Die elektrischen Grundgleichungen und die Hauptformeln der vierdimensionalen Elektrodynamik werden in einer Schreibweise mitgeteilt, die unabhängig vom Maßsystem richtig ist und durch Spezialisierung in die für die üblichen Maßsysteme gültigen Formeln übergeht.

Jeder Physiker weiß, wie viel mühselige Leerlaufarbeit durch das Nebeneinander und Durcheinander der verschiedenen elektrischen Maßsysteme entsteht. Ich gehe im folgenden davon aus, daß das Nebeneinander gegenwärtig und mit Rücksicht auf die vorhandenen Lehr- und Handbücher auch in einiger Zukunft nicht zu vermeiden ist, und habe nicht die Absicht, die Vorzüge oder Nachteile dieser Systeme miteinander zu vergleichen. Mein Ziel ist vielmehr, zu einer Beschreibung zu gelangen, die *alle Maßsysteme gleichzeitig* umfaßt. Die Naturvorgänge sind unabhängig von Maßsystemen, sie müssen sich daher auch in einer allgemeinen maßsystemunabhängigen Form darstellen lassen.

Man kann die Formeln der Elektrodynamik maßsystemunabhängig schreiben, indem man vier Faktoren einführt, deren Bedeutung aus einer Tabelle für jedes Maßsystem entnommen werden kann. Der Übergang von den Formeln des einen Systems zu denen des anderen wird so äußerst bequem und zuverlässig ausführbar. Im folgenden sollen vor allem die wichtigsten Formeln der lorentzinvarianten Elektrodynamik, wie sie im

Artikel von A. Sommerfeld in Frank-Mises<sup>1</sup> in so vollendeter Weise mitgeteilt sind, in der maßsystemunabhängigen (umsetzbaren) Form angegeben werden.

Die allgemeinen Konstanten. Die maßsystemunabhängige Schreibweise findet sich, soweit mir bekannt ist, zum erstenmal in wesentlichen Teilen bei E. Cohn<sup>2</sup>, vollständig bei F. Emde<sup>3</sup>. In unseren Konstanten ist der Faktor  $4\pi$  anders untergebracht als bei Emde. Ich sehe darin eine Verbesserung. Die vier Konstanten sind:

1. Der „Flußfaktor“  $\nu$ , der das Verhältnis zwischen „elektrischem Fluß“  $\Omega = \oint \mathfrak{D}_n d\mathfrak{f}$  und der „durchgeflossenen Elektrizitätsmenge“  $e$  willkürlich festsetzt. In altertümlicher Redeweise kann man auch sagen:  $\nu$  gibt die Zahl der Kraftlinien an, die nach Definition vom Einheitspol ausgehen. Der gleiche Faktor gilt zwischen den entsprechenden magnetischen Größen, nämlich den „magnetischen Fluß“  $\Psi = \oint \mathfrak{B}_n d\mathfrak{f}$  und der „magnetischen Polstärke“  $m$ . Es ist  $\Omega = \nu e$  und  $\Psi = \nu m$ .

2. Der Ausgleichsfaktor  $\gamma$ , der auftritt, wenn die linke Seite einer Maxwellschen Gleichung mit der

<sup>2</sup> E. Cohn, Das elektromagnetische Feld, 2. Aufl., 1927.

<sup>3</sup> F. Emde, Handwörterbuch der Naturwissenschaften. Verlag G. Fischer, Jena 1932, 2. Aufl., Bd. 7, S. 1016.

<sup>1</sup> Ph. Frank u. R. v. Mises (Riemann-Weber), Differential- und Integralgleichungen der Physik, Braunschweig 1927, Bd. 2, S. 391—429.